УДК 517.51

ПОСТРОЕНИЕ МНОГОМОДУЛЯРНЫХ ПРОСТРАНСТВ ИЗ ОБОБЩЕННЫХ ПРОСТРАНСТВ ОРЛИЧА

В.И. Филиппов[1]

1 *888vadim@mail.ru*; Саратовский социально-экономический институт (филиал) РЭУ им. Г.В. Плеханова

Для введенных ранее автором многомодулярных пространств доказываются теоремы полноты специальных многомодулярных пространств.

Ключевые слова: многомодулярные пространства, обобщенные классы и пространства Орлича, пространства E_φ.

Основы модулярных пространств отражены в монографиях [1] и [2]. В данной работе рассматривается обобщение модулярных пространств (многомодулярные пространства), приводятся теоремы полноты некоторого вида этих пространств. Для этих пространств определяется F-норма. Заметим, что обобщенные пространства и классы Орлича, а также классы L_p являются частным случаем модулярных пространств. В работах [3–5] рассматриваются системы представления в некоторых конкретных модулярных пространствах. В работе [6] анонсированны некоторые результаты по многомодулрным пространствам. В статьях [3, 7, 8] исследованы ряды Фурье и Фурье-Хаара в специальных модулярных пространствах. Пространство E с F-нормой (нормой) будем называть F-пространством (B-пространством), если оно полно.

Определение 1. *Скажем, что функционал $\rho : E \to [0,\infty)$, на действительном или комплексном векторном пространстве E, называется псевдомодуляром, если для произвольных x и y принадлежащих E выполняются условия:*

1) $\rho(0) = 0$;

2) В случае, когда E действительное, $\rho(-x) = \rho(x)$. Если E комплексное, то для любого действительного t имеем $\rho(e^{it}x) = \rho(x)$;

3) Для $\alpha \ge 0$ и $\beta \ge 0$ и $\alpha+\beta = 1$ $\rho(\alpha x+\beta y) \le \rho(x)+\rho(y)$.

Предположим, что E_i, $i = \overline{1,n}$, - действительные или комплексные векторные пространства. Рассмотрим множество E_0^n состоящее из элементов $f = (f_1, f_2,\dots, f_n)$, где $f_i \in E_i$, $i = \overline{1,n}$. Пусть $f, g \in E_0^n$, L – поле скаляров. Введем в множестве E_0^n сумму $f + g$ и произведение элемента $f \in E_0^n$ на скаляр $\alpha \in L$ покоординатно. Можно показать, что множество E_0^n является линейным пространством.

Пусть $\rho_i, i = \overline{1,n}$, псевдомодуляры (модуляры [6]) в $E_i, i = \overline{1,n}$, то $\rho_0(f) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \rho_i(f_i)$, $f \in E_0^n$, будет псевдомодуляром (модуляром) в E_0^n.

Определение 2. *Если ρ_0 псевдомодуляр в E_0^n, то*

$$E_\rho^n = \left\{ f \in E_0^n : \lim_{\lambda\to 0} \rho_0(\lambda f) = 0 \right\}$$

называется многомодулярным пространством.

Пусть ρ_0 псевдомодуляр в E_0^n. Тогда функционал

$$|f|_{\rho_0} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \inf\left\{\varepsilon > 0 : \rho_i\left(\frac{f_i}{\varepsilon}\right) \le \varepsilon\right\}$$

будет F-псевдонормой в E_ρ^n.

Теорема 1. *Пусть ρ_i псевдомодуляры в E_i, $i = \overline{1,n}$. Если $f \in E_\rho^n$ и $f_k \in E_\rho^n$ для $k = 1,2,3\ldots$, то условие $|f_k - f|_{\rho_0} \to 0$ при $k \to \infty$ эквивалентно условию $\rho_0(\alpha(f_k - f)) \to 0$ при $k \to \infty$ для любого $\alpha > 0$. Если $f_k \in E_\rho^n$ для $k = 1,2,3...$, то $\{f_k\}$ является последовательностью Коши в пространстве E_ρ^n относительно F-псевдонормы $|\cdot|_{\rho_0}$, тогда и только тогда, когда $\rho_0(\alpha(f_k - f_l)) \to 0$ при $k \to \infty$, $l \to \infty$ для каждого $\alpha > 0$.*

Определение 3. *Предположим, что $(\Omega_i, \Sigma, \mu_i)$, $i = \overline{1,n}$, измеримое пространство, т.е. Ω_i – непустое множество, Σ – σ-алгебра подмножеств из Ω_i и μ_i – неотрицательная полная мера не эквивалентная нулю. Будем говорить, что действительная функция φ_i определенная на $\Omega_i \times \{[0,\infty)\}$ принадлежит классу B, если она удовлетворяет следующим условиям:*
1) $\varphi_i(x,v)$ есть φ-функция от переменной $v \ge 0$ для каждого $x \in \Omega_i$, т.е. является неубывающей, непрерывной функцией такой, что $\varphi_i(x,0) = 0$, $\varphi_i(x,v) > 0$ для $v > 0, \varphi_i(x,v) \to \infty$ при $v \to \infty$.
2) $\varphi_i(x,v)$ является Σ-измеримой функцией от x для всех $v \ge 0$.

Пусть E_i – множество всех действительнозначных (или комплекснозначных) Σ-измеримых и конечных μ_i-почти всюду функцией на Ω_i с эквивалентностью μ_i-почти всюду. Очевидно, что $\varphi_i(x, f_i(x))$ является Σ-измеримой функцией от x для каждой $f_i(x) \in E_i$ и $\rho_i(f_i(x)) = \int\limits_{\Omega_i} \varphi_i(x,|f_i(x)|)d\mu_i$ является модуляром в E_i.

Определение 4. *Пусть $\varphi_i \in B$, $i = \overline{1,n}$. Модулярное пространство E_{ρ_i}, $\rho_i(f_i(x)) = \int_{\Omega_i} \varphi_i(x,|f_i(x)|)d\mu_i$, состоящее из множества всех тех $f_i(x) \in E_i$ для которых $\int\limits_{\Omega_i} \varphi_i(x,\alpha|f_i(x)|)d\mu_i \to 0$, при $\alpha \to +0$, назовем обобщенным пространством Орлича и будем обозначать, при $n = 1$, через $\varphi^*(L,\Omega,\Sigma,\mu)$ (или коротко $\varphi^*(L)$).*

Модулярное пространство E_ρ^n, $\rho_0(f(x)) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \rho_i(f_i(x))$, состоящее из множества всех тех $f(x) \in E_0^n$ для которых $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \int\limits_{\Omega_i} \varphi_i(x,\alpha|f_i(x)|)d\mu_i \to 0$, при $\alpha \to +0$, будем обозначать через $\varphi_n^*(L,\Omega,\Sigma,\mu)$ (или коротко $\varphi_n^*(L)$).

Определение 5. *Пусть $\varphi_i \in B$, $i = \overline{1,n}$. Множество всех тех $f_i(x) \in E_i$, для которых $\int\limits_{\Omega_i} \varphi_i(x,|f_i(x)|)d\mu_i < \infty$, назовем, при $n = 1$, обобщенным классом Орлича и будем обозначать $\varphi(L,\Omega,\Sigma,\mu)$ (или коротко $\varphi(L)$).*

Множество всех тех $f(x) \in E_0^n$ для которых

$$\rho_0(f(x)) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\int\limits_{\Omega_i} \varphi_i(x,|f_i(x)|)d\mu_i < \infty,$$

будем обозначать через $\varphi_n(L,\Omega,\Sigma,\mu)$ (или коротко $\varphi_n(L)$).

Определение 6. *Функция $f(x) \in E_0^n$ называется ограниченным элементом в $\varphi_n^*(L)$, если $\alpha f(x) \in \varphi_n(L)$ для любого $\alpha > 0$. Множество всех ограниченных элементов в $\varphi_n^*(L)$ обозначим через E_φ^n (при $n = 1$ обозначим через E_φ).*

Очевидно, что E_φ^n есть подпространство $\varphi_n^*(L)$.

Теорема 2. *Пусть μ_i, $i = \overline{1,n}$, σ-конечна. Тогда обобщенное пространство Орлича $\varphi_n^*(L)$ полно по соответствующей φ-норме $\|\cdot\|_\varphi^n$.*

Доказательство. Предположим, что $\mu(\Omega_i) < \infty$. Тогда мера μ_i абсолютно непрерывна по соответствующей мере $\eta(D_i) = \int_{D_i} \varphi_i(x,v)d\mu_i$, $D_i \in \Sigma$, для любого $v > 0$. Следовательно, для всякого $v > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что если $D_i \in \Sigma$ и $\int_{D_i} \varphi_i(x,v)d\mu_i < \delta$, то $\mu_i(D_i) < v$, $i = \overline{1,n}$.

Пусть, теперь, (f_n) последовательность Коши в $\varphi_n^*(L)$ и $\alpha > 0$ произвольно. Тогда существует индекс k_0 такой, что $\rho_0\left(\alpha(f_k - f_m)\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \rho_i(\alpha|f_m^i(x) - f_k^i(x)|) <$ $\min\{\delta, v\}$ и $\rho_i\left(\alpha\left|f_m^i(x) - f_k^i(x)\right|\right) < \min\{\delta, v\}$, $i = \overline{1,n}$, для $m > k_0$, $k > k_0$. Обозначим $A_{m,k}^i = \{x \in \Omega_i : \alpha|f_m^i(x) - f_k^i(x)| \geq v\}$, имеем, что $\int_{A_{m,k}^i} \varphi_i(x,v)d\mu_i < \delta$ и, следовательно, $\mu_i(A_{m,k}^i) < v$ для $m,k > k_0$. Тогда последовательность (αf_k^i) сходится по мере μ_i к функции $\alpha f_i \in E_i$ на множестве Ω_i. По теореме Рисса последовательность (f_k^i) содержит подпоследовательность $(f_{k_j}^i)$ сходящуюся к f_i μ_i-почти всюду. Поэтому $\varphi_i\left(x, \alpha\left|f_k^i(x) - f_{k_j}^i(x)\right|\right) \to \varphi_i\left(x, \alpha\left|f_k^i(x) - f_i(x)\right|\right)$ при $j \to \infty$ μ_i-почти всюду на Ω_i для каждого k. Применяя лемму Фату, получим $\rho_i\left(\alpha(f_k^i(x) - f_i(x))\right) \leq$ $\underline{\lim}_{j\to\infty}\rho_i\left(\alpha(f_k^i - f_{k_j}^i)\right) < v$ для $k > k_0$, заметим, что v - произвольно. Таким образом, $\|f_k^i(x) - f_i(x)\|_{\varphi_i} \to 0, \quad k \to \infty$. Следовательно, $f_i(x) \in \varphi_i^*(L)$, $i = \overline{1,n}$, и $\|f_k(x) - f(x)\|_\varphi^n \to 0, \quad k \to \infty$, а $f(x) \in \varphi_n^*(L)$.

Опустим ограничение $\mu_i(\Omega_i) < \infty$, $i = \overline{1,n}$. Пусть $\mu_i(\Omega_i) = \infty$, $i = \overline{1,n}$, $\Omega_i = \Omega_1^i \cup \Omega_2^i \cup \ldots$, $\Omega_1^i \subset \Omega_2^i \subset \ldots$, $\mu_i(\Omega_k^i) < \infty$ для каждого k.

Применяя предыдущую часть к доказательству Ω_k^i вместо Ω_i, видим, что существует функция $f_i \in E_i$ такая, что (f_j^i) сходится к f_i по мере μ_i для каждого множества Ω_k^i и $\int\limits_{\Omega_k^i} \varphi_i\left(x, \alpha|f_j^i(x) - f_i(x)|\right)d\mu_i \to 0$, $j \to \infty$ для $k = 1,2\ldots$. Зафиксируем j, пусть $g_k^i(x) = \varphi_i\left(x, \alpha|f_j^i(x) - f_i(x)|\right)$, если $x \in \Omega_k^i$, $g_k^i(x) = 0$, если $x \notin \Omega_k^i$, $g_i(x) = \varphi_i\left(x, \alpha|f_j^i(x) - f_i(x)|\right)$. Тогда получим

$$\int\limits_{\Omega_i} g_k^i(x)d\mu_i = \int\limits_{\Omega_k^i} \varphi_i\left(x, \alpha|f_j^i(x) - f_i(x)|\right)d\mu_i \leq$$

$$\underline{\lim}_{l\to\infty}\int\limits_{\Omega_k^i} \varphi_i\left(x, \alpha|f_j^i(x) - f_{j_l}^i(x)|\right)d\mu \leq \underline{\lim}_{l\to\infty}\rho_i\left(\alpha(f_j^i(x) - f_{j_l}^i(x))\right) \leq v$$

для достаточно больших j (независимых от k). Так как $g_k^i(x) \to g_i(x)$ почти всюду на Ω_i, то получим

$$\rho_i\left(\alpha(f_j^i(x) - f_i(x))\right) = \int\limits_{\Omega_i} g_i(x)d\mu_i \le \underline{\lim}_{k\to\infty} \int\limits_{\Omega_i} g_k^i(x)d\mu_i < v$$

для достаточно больших j. Следовательно, $\|f_j^i(x) - f_i(x)\|_{\varphi_i} \to 0$, а, значит, $\|f_k(x) - f(x)\|_{\varphi}^n \to 0, \quad k \to \infty$.

Заметим, если возьмем $\varphi_i(x,v) = \varphi_i(v)$, независящую от x, то нам не потребуется σ-конечность μ_i для доказательства полноты $\varphi_n^*(L)$. Это следует из того, что первую часть теоремы 2 можно повторить без использования σ-конечности μ_i.

Таким образом, для случая $\varphi_i(x,v) = \varphi_i(v),\ i = \overline{1,n}$, имеем

Теорема 3. *Обобщенное пространство Орлича $\varphi_n^*(L)$ полно по соответствующей F-норме $\|\cdot\|_{\varphi}^n$.*

Литература

1. Nakano H. *Topology and topological linear spaces*. – Tokyo, 1951.

2. Musielak J. *Orlicz spaces and modular spaces*. – Lecture Notes in Math., 1034, Springer-Verlag, Berlin, 1983. – P. 222.

3. Filippov V. I. *Linear continuous functionals and representation of functions by series in the spaces E_φ* // Analysis Mathematica. – 2001. – V. 27. – № 4. – P. 239–260.

4. Филиппов В. И. *Об усилении результатов А.Н. Колмогорова о рядах Фурье и сопряженных функциях* // Известия Вузов. Математика. – 2012. – № 7. – С. 21–34.

5. Филиппов В. И. *Системы представления, полученные из сжатий и сдвигов одной функции в многомерных пространствах E_φ* // Изв. РАН, сер. матем. – 2012. – Т. 76. – № 6. – С. 193–206.

6. Филиппов В. И. *Многомодулярные пространства* // Вестник СГСЭУ. – 2015. – № 1(60). – С. 44–48.

7. Голубов Б. И. *Абсолютная сходимость двойных рядов из коэффициентов Фурье-Хаара функций ограниченной p-вариации* // Изв. вузов. Матем. – 2012. – № 6. – С. 3–13.

8. Голубов Б. И., Ефимов А. В., Скворцов В. А. *Ряды и преобразования Уолша. Теория и применения.* – М.: Наука, 1987. – С. 344.

CONSTRUCTION OF MULTIMODULAR SPACE FROM THE GENERALIZED ORLICZ SPACES

V.I. Filippov

For previously introduced by the author multimodular spaces they are obtained theorems of completeness of special multimodular spaces.

Keywords: multimodular spaces, generalized Orlicz spaces, E_φ spaces.